rectangle en O.

PROBLEME (10 points)

A- On considère la fonction f_1 définie sur $[-1,+\infty[$ par $f_1(x)=\sqrt{1+x}\,e^{-x}$ et on désigne par C_1 sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1)a- Etudier la dérivabilité de f_1 à droite en -1.

b- Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c- Calculer la limite de f_1 en $+\infty$.

d- Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Dresser le tableau de variation de f_1.

3) Donner l'équation de la tangente à C_1 au point d'abscisse 0.

4) Montrer que l'équation $f_1(x) = x$ admet une unique solution α dans $[-\frac{1}{2},+\infty[$ et que $\alpha \in]-\frac{1}{2},1[$.

5) Tracer la courbe C_1.

6)a- Montrer que pour tout réel x, on a $1+x \le e^x$.

b- En déduire que pour tout réel x, on a $f_1(x) \le e^{-\frac{x}{2}}$.

7) Soit λ un réel supérieur ou égal à 1 et $S(\lambda) = \int_1^{\lambda} f_1(x)dx$.

a- Donner une interprétation graphique du réel $S(\lambda)$.

b- Montrer que pour tout $\lambda \ge 1$, on a $0 \le S(\lambda) \le \frac{2}{\sqrt{e}}$.

B- Pour tout $n \in IN^*$, on considère la fonction f_n définie sur $[-1,+\infty[$ par $f_n(x) = \sqrt{1+x}\,e^{-\frac{x}{n}}$ et on désigne par C_1 sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Montrer que toutes les courbes C_n passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.

2)a- Montrer que pour tout n de IN^*, la courbe C_n admet une tangente horizontale en un point M_n.

b- On désigne par α_n l'abscisse de M_n. Etudier la nature de la suite (α_n).

3) Etudier la position relative de C_n et C_{n+1}.

4) On pose $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x}\,dx$ et on désigne par (A_n) la suite définie pour tout n de IN^* par $A_n = \int_{-1}^{1} f_n(x)dx$.

a- Calculer I.

b- Montrer que pour tout n de IN^*, on a $1-e^{\frac{1}{n}} \le e^{\frac{-1}{n}} - 1$.

c- En déduire que pour tout $x \in [-1,1]$, $\left|e^{\frac{-x}{n}} - 1\right| \le e^{\frac{1}{n}} - 1$.

d- Montrer que $|A_n - I| \le \frac{4}{3}\sqrt{2}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$.